

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC**

Trịnh Thu Trang

**TÌM HIỂU VỀ TÍCH PHÂN LEBESGUE
VÀ KHÔNG GIAN L^p**

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC HỆ CHÍNH QUY

Ngành: Toán - Tin ứng dụng

Người hướng dẫn: TS. Đặng Anh Tuấn

Hà Nội - 2011

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Đặng Anh Tuấn người thầy đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới bạn bè những người đã luôn bên cạnh cổ vũ, động viên và giúp đỡ em.

Đặc biệt cho em gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình những người luôn chăm lo, động viên và cổ vũ tinh thần cho em.

Hà Nội, ngày 16 tháng 05 năm 2011

Sinh viên

Trịnh Thu Trang

Mục lục

Mở đầu	1
1 Tích phân Lebesgue	3
1.1 Đại số	3
1.2 Độ đo	7
1.2.1 Độ đo trên σ -đại số tập hợp	7
1.2.2 Độ đo Lebesgue	11
1.3 Hàm đo được Lebesgue	16
1.3.1 Hàm đo được Lebesgue	16
1.3.2 Các phép toán về hàm số đo được	17
1.3.3 Cấu trúc hàm đo được	19
1.3.4 Hội tụ hầu khắp nơi	20
1.3.5 Sự hội tụ theo độ đo	22
1.3.6 Mối liên hệ giữa hội tụ	24
1.4 Tích phân Lebesgue	28
1.4.1 Tích phân của hàm đơn giản	28
1.4.2 Tích phân của hàm không âm	29
1.4.3 Tích phân của hàm có dấu bất kỳ	29
1.4.4 Các tính chất sơ cấp	30

1.4.5	Qua giới hạn dưới dấu tích phân	33
1.4.6	Mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue và Rie mann	36
2	Không gian L^p	38
2.1	Không gian L^p	38
2.2	Tính tách được của L^p	47
2.3	Biến đổi Fourier	50
2.3.1	Biến đổi Fourier trong L^1	51
2.3.2	Biến đổi Fourier trong L^p	52
	Kết luận	55

Mở đầu

Tích phân Lebesgue xuất hiện vào thế kỷ XX nhằm giải quyết một vài nhược điểm của tích phân Riemann, chẳng hạn hàm Dirichlet là hàm đơn giản nhưng không khả tích Riemann. Có một điều thú vị về ý tưởng xây dựng hai loại tích phân này. Hai loại tích phân này được xây dựng dựa trên hai cách nhìn khác nhau về hàm số: Bernhard Riemann nhìn hàm số bắt đầu từ miền xác định còn Henri Lebesgue nhìn hàm số từ tập giá trị. Khóa luận của em nhằm tìm hiểu cách xây dựng tích phân Lebesgue và các lớp hàm khả tích Lebesgue cũng như có những so sánh với các kết quả đã học trong tích phân Riemann. Khóa luận được chia thành hai chương.

Trong Chương 1, em trình bày cách thức xây dựng tích phân Lebesgue từ độ đo Lebesgue, hàm đo được Lebesgue rồi tích phân Lebesgue và hàm khả tích Lebesgue. Trong chương này có khái niệm hội tụ hầu khắp nơi và hội tụ theo độ đo là sự mở rộng của khái niệm hội tụ điểm và hội tụ đều. Em đã đưa vào các ví dụ cho thấy sự khác nhau giữa các khái niệm hội tụ này. Phần gần cuối chương có đề cập đến các kết quả quan trọng về việc chuyển giới hạn qua dấu tích phân của Beppo Levi, Pierre Fatou, đặc biệt của Henri Lebesgue về hội tụ chặn. Em đưa ví dụ cho thấy kết quả đã học ở Giải tích về việc chuyển giới hạn qua dấu lấy tích phân được mở rộng thực sự. Kết thúc chương này là kết quả về mối quan hệ giữa tích phân Lebesgue và tích phân Riemann.

Trong Chương 2, em trình bày không gian $L^p, 1 \leq p \leq \infty$ và các tính chất. Đây là lớp không gian Banach (định chuẩn, đầy đủ) hơn nữa còn tách được (có tập con đếm được trù mật) ngoại trừ trường hợp $p = \infty$. Sau khi trình bày các tính chất cơ bản này, em trình bày phép biến đổi Fourier trong $L^p, 1 \leq p \leq 2$. Để xây dựng được phép biến đổi Fourier em dựa vào Bất đẳng thức Hausdorff-Young. Trong trường hợp $p > 2$ em đã đưa vào ví dụ cho thấy Bất đẳng thức này không còn đúng.

Do thời gian có hạn cũng như việc nắm bắt kiến thức còn hạn chế nên trong Khóa luận không tránh khỏi thiếu sót, chẳng hạn em chưa đưa vào chứng minh Bất đẳng thức Hausdorff-Young vì chứng minh này đòi hỏi khá nhiều kiến thức chuẩn bị (Lý thuyết nội suy không gian). Rất mong được sự chỉ bảo của thầy cô và bạn bè khắp nơi.

Chương 1

Tích phân Lebesgue

1.1 Đại số

Định nghĩa 1.1.1. [1] Cho tập X là một tập tùy ý khác rỗng. Một họ $\mathcal{C}$ các tập con của X được gọi là đại số các tập con của X , nếu $\mathcal{C}$ thỏa mãn ba điều kiện:

- i) $X \in \mathcal{C}$,
- ii) $A \in \mathcal{C}$ thì $X \setminus A \in \mathcal{C}$,
- iii) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ thì $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$.

Mệnh đề 1.1.1. Cho $\mathcal{C}$ là đại số tập con của X thì:

- i) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
- ii) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ thì $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$,
- iii) $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{C}$ thì $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

Chứng minh.

- i) Do $\mathcal{C}$ là đại số tập con của X nên theo điều kiện (i) của đại số $X \in \mathcal{C}$.

Mà đại số kín với phép lấy phần bù nên $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{C}$.

ii) Do $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ nên $X \setminus A_1, X \setminus A_2, \dots, X \setminus A_n \in \mathcal{C}$. Vì $\mathcal{C}$ kín với phép hợp hữu hạn nên $\bigcup_{k=1}^n (X \setminus A_k) \in \mathcal{C}$. Mặt khác $\bigcup_{k=1}^n (X \setminus A_k) = X \setminus (\bigcap_{k=1}^n A_k)$ nên $X \setminus (\bigcap_{k=1}^n A_k) \in \mathcal{C}$. Mà $\mathcal{C}$ kín với phép lấy phần bù nên $X \setminus (X \setminus (\bigcap_{k=1}^n A_k)) = \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$. Vậy $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$.

iii) Ta có $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$. Mà $A, X \setminus B \in \mathcal{C}$ nên $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{C}$ (theo tính chất 2 vừa chứng minh). Vậy $A \setminus B \in \mathcal{C}$. $\square$

Mệnh đề 1.1.2. Cho $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{\bigcup_{i=1}^n \Delta_i : \Delta_i \text{ là gian, } i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \text{ với } i \neq j\}$ là đại số các tập con của $\mathbb{R}$.

Trong đó, gian trên $\mathbb{R}$ là một tập điểm có một trong các dạng sau

$(a, b), [a, b], (a, b], [a, b), (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $\Delta = [a, b]$ thì $|\Delta| = a - b$ được gọi là độ dài của Δ trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh.

i) Chọn $\Delta_1 = (-\infty, 0), \Delta_2 = [0, +\infty), \Delta_3 = (a, a)$ thì $\mathbb{R} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathcal{C}$ và $\emptyset = \Delta_3 \in \mathcal{C}$.

ii) Giả sử $A \in \mathcal{C}$ thì khi đó A là hợp của hữu hạn của các gian không giao nhau. Trường hợp A là hợp hữu hạn của các gian có dạng $\Delta_i = (a_i, a_{i+1})$ với $a_i, a_{i+1} \in \mathbb{R}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$. Khi đó $A = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ và

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus A &= (-\infty, a_1] \cup [a_2, a_3] \cup \dots \cup [a_{2n}, +\infty) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n-1} [a_{2i}, a_{2i+1}] \cup (-\infty, a_1] \cup [a_{2n}, +\infty), \end{aligned}$$

cũng là hợp hữu hạn của các gian.

Một cách xây dựng tương tự với các trường hợp còn lại của tập A ta cũng có $\mathbb{R} \setminus A$ cũng là hợp hữu hạn của các gian. Vậy $\mathcal{C}$ kín với phép lấy phần bù.

iii) Giả sử $P, Q \in \mathcal{C}$. Trước hết ta chứng minh $P \cap Q \in \mathcal{C}$.

Đặt $P = \bigcup_{i=1}^n I_i$, I_i là một gian $I_i \cap I_{i'} = \emptyset$ với $i \neq i'$.

$Q = \bigcup_{j=1}^k J_j$, J_j là một gian $J_j \cap J_{j'} = \emptyset$ với $j \neq j'$. Khi đó

$$P \cap Q = P \cap \left(\bigcup_{j=1}^k J_j \right) = \bigcup_{j=1}^k (P \cap J_j) = \bigcup_{j=1}^k \left[\left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right) \cap J_j \right] = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^n (I_i \cap J_j).$$

Mà $I_i \cap J_j = L_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k$) là các gian không giao nhau đôi một nên

$$\bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^n L_{ij} \in \mathcal{C} \text{ hay } P \cap Q \in \mathcal{C}.$$

Theo chứng minh ở trên thì $\mathbb{R} \setminus P, \mathbb{R} \setminus Q \in \mathcal{C}$ nên $(\mathbb{R} \setminus P) \cap (\mathbb{R} \setminus Q) \in \mathcal{C}$,

hay $\mathbb{R} \setminus (P \cup Q) \in \mathcal{C}$.

Từ chứng minh (ii) trên có $P \cup Q \in \mathcal{C}$. Sử dụng quy nạp ta có nếu $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$

thì $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$. □

Định nghĩa 1.1.2. [1] Cho X là một tập hợp khác rỗng, một họ $\mathcal{F}$ các tập con của X được gọi là σ -đại số, nếu $\mathcal{F}$ thỏa mãn ba điều kiện:

i) $X \in \mathcal{F}$,

ii) $A \in \mathcal{F}$ thì $X \setminus A \in \mathcal{F}$,

iii) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ thì $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Ví dụ 1.1.1. Cho $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n \Delta_i : \Delta_i \text{ là các gian rời nhau, } i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$

không là σ -đại số.

Thật vậy, đặt $A_k = [2k, 2k+1], k \in \mathbb{N}$ thì $A_k \in \mathcal{C}$. Ta cần đi chứng minh

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ không có dạng $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i$, với Δ_i là một gian.

Sử dụng phản chứng, giả sử rằng $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ với Δ_i là gian và $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ ($i \neq j$).

Giả sử Δ_1 có đầu mút là a_1, a_2 ; Δ_2 có đầu mút là a_3, a_4 ; $\dots$; Δ_n có đầu mút là a_{2n-1}, a_{2n} .

Do các gian rời nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-1} < a_{2n}$.

Nếu $a_{2n} < +\infty$, chọn k_0 sao cho $2k_0 > a_{2n}$. Như vậy $2k_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} [2k, 2k+1]$ nhưng

$2k_0 \notin \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$. Điều này vô lý.

Nếu $a_{2n} = +\infty$, chọn k_0 sao cho $2k_0 > a_{2n-1}$.

Như vậy $2k_0 + \frac{3}{2} \in \Delta_n$ nhưng $2k_0 + \frac{3}{2} \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} [2k, 2k+1]$. Điều này vô lý.

Vậy điều giả sử là sai, $\mathbb{C}$ không là σ -đại số.

Ta sẽ xây dựng một σ -đại số nhỏ nhất chứa $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.3. *[1] σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở trong không gian $\mathbb{R}$ được gọi là σ -đại số Borel của không gian $\mathbb{R}$ và những tập thuộc σ -đại số này được gọi là tập Borel trong không gian $\mathbb{R}$.*

Tập Borel là những tập xuất phát từ tập mở và thực hiện một số hữu hạn hay đếm được phép toán hợp, giao trên tập đó.

Theo định nghĩa σ -đại số một tập là tập Borel thì phần bù của nó cũng là tập Borel. Do đó tập mở là tập Borel nên tập đóng cũng là tập Borel.

Do σ -đại số đóng với phép hợp và giao đếm được nên hợp của một số đếm được các tập đóng là một tập Borel và giao của một số đếm được tập mở cũng là tập Borel.

Mệnh đề 1.1.3.

i) σ -đại số Borel trong không gian $\mathbb{R}$ cũng là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập đóng.

ii) σ -đại số Borel trên $\mathbb{R}$ cũng là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các khoảng.

iii) σ -đại số Borel trên $\mathbb{R}$ cũng là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các gian.

Chứng minh. i) Cho M là lớp các tập mở trong $\mathbb{R}$. Gọi $\mathcal{F}(M)$ là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp M hay σ -đại số Borel. N là lớp các tập đóng, $\mathcal{F}(N)$ là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm N . Ta có $N \subset \mathcal{F}(M)$ nên $\mathcal{F}(N) \subset \mathcal{F}(M)$.

Mặt khác vì mỗi tập mở là phần bù của tập đóng nên $M \subset \mathcal{F}(N)$. Do đó $\mathcal{F}(M) \subset \mathcal{F}(N)$. Vậy $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(N)$ hay σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập đóng cũng là σ -đại số Borel.

ii) Cho M là lớp các tập mở trong $\mathbb{R}$, N là lớp các khoảng. Vì mỗi khoảng đều là tập mở nên $N \subset \mathcal{F}(M)$ với $\mathcal{F}(M)$ là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm M và $\mathcal{F}(N) \subset \mathcal{F}(M)$.

Mà mỗi tập mở là hợp hữu hạn hay đếm được các khoảng nên $M \subset \mathcal{F}(N)$ và $\mathcal{F}(M) \subset \mathcal{F}(N)$.

Vậy $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(N)$ hay σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các khoảng cũng là σ -đại số Borel.

iii) Cho G là lớp các gian, N là lớp các khoảng. Gọi $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{F}(N)$ là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm mỗi tập đó. Do gian chứa các khoảng mở nên $\mathcal{F}(N) \subset \mathcal{F}(G)$.

Mà mỗi gian lại biểu diễn được thành hợp hữu hạn hoặc đếm được của các tập mở hoặc đóng và σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở cũng là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm các tập đóng. Do đó $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(N)$.

Vậy $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(N)$. □

1.2 Độ đo

1.2.1 Độ đo trên σ -đại số tập hợp

Cho X là tập bất kỳ trong không gian $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ là σ -đại số các tập con của X .

Xét hàm tập $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$.

Định nghĩa 1.2.1. *[1] μ được gọi là cộng tính nếu*

$$A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset, A \cup B \in \mathcal{F} \quad \text{thì} \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Định nghĩa 1.2.2. [1] μ được gọi là cộng tính hữu hạn nếu có một họ hữu hạn các tập hợp đôi một rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Định nghĩa 1.2.3. [1] μ được gọi là σ -cộng tính nếu có một họ đếm được các tập hợp đôi một rời nhau $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Một hàm σ -cộng tính thì cộng tính nhưng ngược lại không đúng.

Định nghĩa 1.2.4. [1] μ là độ đo trên σ -đại số nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) μ là σ -cộng tính.

Tính chất của độ đo

Với μ là độ đo trên $\mathcal{F}$ ta có các tính chất sau:

1. $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$ thì $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Vì $A \subset B$ nên $B = (B \setminus A) \cup A, B \setminus A \cap A = \emptyset$.

Do đó $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$.

2. Nếu $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B, \mu(A) < +\infty$ thì $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Vì $\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ hay $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Hợp của một họ đếm được các tập có độ đo bằng 0 là tập có độ đo bằng 0.

Ta có $\mu(A_k) = 0$ với $k = 1, 2, \dots, n \dots$ và μ là σ -cộng tính nên

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

Định nghĩa 1.2.5. Độ đo μ được gọi là độ đo đủ nếu mọi tập con của tập có độ đo bằng 0 đều là tập đo được và có độ đo bằng 0.

Định nghĩa 1.2.6. [1] Một hàm μ^* xác định trên một lớp tất cả các tập con của không gian $\mathbb{R}$, được gọi là độ đo ngoài nếu:

i) $\mu^*(A) \geq 0$ với mọi $A \subset X$,

ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

iii) $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ thì $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Định lý 1.2.1. [1](Caratheodory) Cho μ^* là độ đo ngoài trên X , ký hiệu $\mathcal{L}$ là lớp tất cả các tập con A của X sao cho

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{với mọi } E \subset X. \quad (1.2.1)$$

Khi ấy $\mathcal{L}$ là σ -đại số và hàm $\mu = \mu^*/\mathcal{L}$ (thu hẹp của μ^* trên $\mathcal{L}$) là độ đo trên $\mathcal{L}$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $\mathcal{L}$ là một σ -đại số.

Dĩ nhiên $\emptyset \in \mathcal{L}$ vì với mọi $E \subset X$: $\mu^*(E) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E \cap \emptyset) + \mu^*(E \setminus \emptyset)$.

Lớp $\mathcal{L}$ cũng kín đối với phép lấy phần bù, vì nếu $A \in \mathcal{L}$ thì với mọi $E \subset X$ ta có $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(E \cap (X \setminus A))$.

Để chứng minh $\mathcal{L}$ là σ -đại số ta cần chứng minh $\mathcal{L}$ kín với phép hợp đếm được.

Cho $A_i \in \mathcal{L}, i = 1, 2, \dots$ và tập bất kỳ $E \subset X$. Áp dụng đẳng thức 1.2.1, ta có:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\ &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^k \mu^*((E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j) + \mu^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j). \end{aligned}$$

Do đó

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^k \mu^*\left((E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j\right) + \mu^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j).$$

Vì điều này đúng với mọi k nên

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left((E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j\right) + \mu^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j). \quad (1.2.2)$$

Mặt khác dễ dàng nhận thấy

$$E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left((E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j\right),$$

(vì nếu có một j với $x \in E \cap A_j$ thì lấy j là chỉ số nhỏ nhất như vậy ta được $x \in E \setminus A_i$ với mọi $i = 1, \dots, j-1$).

Vậy theo tính chất dưới cộng tính (iii) của μ^* :

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left((E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j\right) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\leq \mu^*(E) \text{ (theo 1.2.2),} \end{aligned}$$

suy ra $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$, chứng tỏ $\mathcal{L}$ là σ -đại số.

Cho $A_i \in \mathcal{L}, i = 1, 2, \dots$ là các tập rời nhau. Lấy $E' = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Khi đó $E' \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$

và $(E' \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i) \cap A_j = A_j$.

Ta có $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ theo (1.2.2),

Mà theo điều kiện (iii) của độ đo ngoài ta có $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Vậy $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ hay μ^* trên $\mathcal{L}$ là một độ đo. □

Như vậy nếu xây dựng một độ đo ngoài μ^* trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn định lý Caratheodory thì ta có một độ đo trên $\mathbb{R}$. Ta xây dựng độ đo ngoài μ^* như sau.

Cho hàm $\mu^* : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta_i \supset A, \Delta_i \text{ là gian}, i = 1, 2, \dots \right\},$$

khi đó μ^* là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, hiển nhiên $\mu^*(A) \geq 0$ với mọi $A \subset \mathbb{R}$, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, với mỗi $i = 1, 2, \dots$ ta lấy một hệ khoảng mở $\Delta_{k,i}$, $k = 1, 2, \dots$

sao cho $\bigcup_{k,i} \Delta_{k,i} \subset A_i$ và $\sum_k |\Delta_{k,i}| \leq \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Vì $A \subset \bigcup_{k,i} \Delta_{k,i}$ ta có

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k,i} |\Delta_{k,i}| \leq \sum_i \left(\mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \right) = \sum_i \mu^*(A_i) + \epsilon.$$

Do $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Vậy μ^* là độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$.

1.2.2 Độ đo Lebesgue

Định nghĩa 1.2.7. [1] Cho hàm $\mu^* : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |\Delta_i| : \bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta_i \supset A, \Delta_i \text{ là gian}, i = 1, 2, 3, \dots \right\},$$

được gọi là độ đo ngoài Lebesgue trên $\mathbb{R}$.

Hàm tập μ^* là một độ đo ngoài trên $\mathbb{R}$ như vậy ta có thể áp dụng định lý Caratheodory để xây dựng một độ đo trên $\mathbb{R}$, đó chính là độ đo Lebesgue.

Định nghĩa 1.2.8. Hàm $\mu^* : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ trong đó $\mathcal{L}$ là lớp tất cả các tập con A của $\mathbb{R}$ sao cho

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{với mọi } E \subset \mathbb{R},$$

là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$, ký hiệu là μ và A được gọi là tập đo được Lebesgue.

Theo định lý Caratheodory thì lớp các tập đo được Lebesgue $\mathcal{L}$ là một σ -đại số.

Định nghĩa 1.2.9. Tập $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}$ nếu A thuộc σ -đại số Lebesgue.

Vậy tập không đo được Lebesgue sẽ như thế nào? Ta lấy ví dụ sau đây từ tài liệu [4]

Ví dụ 1.2.1. Với mỗi tập $A_x = \{y \in [0, 1] : x - y = r, r \in \mathbb{Q}\}$ chọn một điểm. Tập tất cả các điểm này gọi là P thì P là một tập không đo được.

Định nghĩa 1.2.10. [1] Tập N bất kỳ được gọi là tập có độ đo 0 nếu $\mu^*(N) = 0$, tức là sao cho

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset N, \Delta_k \text{ là gian}\right\} = 0. \quad (1.2.3)$$

Định lý 1.2.2. [1] Một tập N có độ đo 0 khi và chỉ khi với mỗi $\epsilon > 0$ có thể tìm được một hệ (hữu hạn hay đếm được) gian Δ_k phủ N và có độ dài tổng cộng nhỏ hơn ϵ

$$\bigcup_k \Delta_k \supset N, \sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta_k| < \epsilon.$$

Chứng minh. Thật vậy, nếu $\mu(N) = 0$ thì theo công thức (1.2.3) với $\epsilon > 0$ cho trước có một hệ khoảng mở Δ_k phủ N sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < \epsilon$.

Ngược lại, nếu với mọi $\epsilon > 0$ đều có một phủ như vậy thì

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset N, \Delta_k \text{ là gian}\right\} = 0.$$

Vậy N là tập có độ đo 0. □

Ví dụ 1.2.2.

1. Tập $N = 1, 2, \dots, n$ là tập có độ đo 0.
2. Tập các số hữu tỉ có độ đo 0.
3. Tập Cantor P trên $[0, 1]$ xây dựng theo cách dưới đây có độ đo 0.

Xét tập hợp $[0, 1]$.

Bước 1. Chia $[0, 1]$ thành ba khoảng bằng nhau, bỏ đi khoảng giữa $G_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Bước 2. Chia ba mỗi đoạn còn lại là $[0, \frac{1}{3}]$ và $[\frac{2}{3}, 1]$ bỏ đi khoảng giữa của chúng.

Đặt $G_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \dots$ Gọi G_n là hợp của 2^{n-1} các khoảng bỏ đi ở bước thứ n , $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ là hợp của tất cả các khoảng bỏ đi, $P = [0, 1] \setminus G$.

Ta có $\mu(G_n) = 2^{n-1} \cdot (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n$.

Khi đó $\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 1$.

Mà $[0, 1] = ([0, 1] \setminus G) \cup G = P \cup G$ nên $\mu([0, 1]) = \mu(P) + \mu(G)$.

Vậy $\mu(P) = \mu([0, 1]) - \mu(G) = 1 - 1 = 0$.

Ta thấy tập có độ đo 0 có thể có lực lượng là hữu hạn, đếm được hay không đếm được. Tập Cantor là một tập đặc biệt. Lực lượng của tập Cantor trên $\mathbb{R}$ là không đếm được nhưng độ đo của nó vẫn bằng 0.

Định lý 1.2.3. [1] *Độ đo Lebesgue là độ đo đủ.*

Chứng minh. Giả sử $\mu(A) = 0$ ta cần chứng minh mọi tập con của A đều đo được và có độ đo bằng 0.

Gọi N là tập con của A thì $0 \leq \mu^*(N) \leq \mu^*(A)$. Mà $\mu^*(A) = 0$ thì $\mu^*(N) = 0$. Lại có $E = (E \cap N) \cup (E \setminus N)$ nên $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap N) + \mu^*(E \setminus N)$ với mọi $E \in \mathbb{R}$.

Do $(E \cap N) \subset N$ nên $\mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) = 0$ và $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \setminus N)$.

Mặt khác $(E \setminus N) \in E$ nên $\mu^*(E \setminus N) \leq \mu^*(E)$. Do đó $\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus N)$, tức là $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap N) + \mu^*(E \setminus N)$.

Vậy N là tập đo được Lebesgue và $\mu(N) = \mu^*(N) = 0$. □

Định lý 1.2.4. *Mọi tập Borel đều đo được Lebesgue.*

Chứng minh. Trước hết ta đi chứng minh mọi khoảng mở đều đo được Lebesgue.

Lấy một khoảng mở Δ bất kỳ. Xét một tập $E \subset \mathbb{R}$ tùy ý và một hệ gian Δ_k

phủ E . Rõ ràng với mỗi k thì $\Delta_k \cap \Delta = \Delta'_k$ là gian và $\Delta_k \setminus \Delta = \bigcup_{k,i} \Delta''_{k,i}$ là hợp các gian.

Cho nên $\bigcup_k \Delta_k = (\bigcup_k \Delta'_k) \cup (\bigcup_k \Delta''_{k,i})$ và $\sum_k |\Delta_k| = \sum_k |\Delta'_k| + \sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}|$.

Do đó

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf \left\{ \sum_k |\Delta_k| \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_k |\Delta'_k| + \sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}| \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_k |\Delta'_k| \right\} + \inf \left\{ \sum_{k,i} |\Delta''_{k,i}| \right\}, \end{aligned}$$

Suy ra $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \Delta) + \mu^*(E \setminus \Delta)$, $\forall E \subset \mathbb{R}$, hay Δ đo được Lebesgue.

Do Δ là khoảng mở bất kỳ nên mọi khoảng mở đều đo được Lebesgue. Mà mỗi tập mở trong $\mathbb{R}$ là một hợp đếm được những khoảng mở, nên σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các khoảng mở cũng là σ -đại số nhỏ nhất bao hàm lớp các tập mở, tức là σ -đại số Borel. Mà σ -đại số $\mathcal{L}$ là σ -đại số bao hàm lớp các khoảng. Vậy σ -đại số $\mathcal{L}$ chứa σ -đại số Borel, hay tập Borel đo được Lebesgue. $\square$

Định lý 1.2.5. *Mỗi tập đo được Lebesgue là một tập Borel thêm hay bớt một tập có độ đo 0.*

Chứng minh. B là tập Borel và N là tập có độ đo 0 thì $B, N \in \mathcal{L}$ nên với tập $A = B \setminus N$ và $A = B \cup N$ cũng đo được Lebesgue.

Ngược lại giả sử $A \in \mathcal{L}$. Ta đi chứng minh tồn tại tập Borel B sao cho $\mu(B) = \mu(A)$.

Vì $A \in \mathcal{L}$ nên có thể tìm được cho mỗi $k = 1, 2, \dots$, những khoảng mở P_{ik} sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{ik} \text{ và } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_{ik}) \leq \mu^*(A) + 1/k = \mu(A) + 1/k.$$

Đặt $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{ik}$ ta thấy $B \supset A$ và B thuộc σ -đại số Borel.

Mặt khác với mọi k , $B \in \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{ij}$ nên

$$\mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_{ik}) \leq \mu(A) + 1/k.$$

Do đó $\mu(B) \leq \mu(A)$ mà $B \supset A$ nên $\mu(B) = \mu(A)$.

Đặt $N = B \setminus A$ ta có $\mu(N) = \mu(B \setminus A) = 0$.

Vì $A \in \mathcal{L}$ nên $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{L}$. Tồn tại hai tập B' là tập Borel và N' là tập có độ đo 0 sao cho $\mathbb{R} \setminus A = B' \setminus N'$. Suy ra $A = (\mathbb{R} \setminus B') \cup N'$, hay $A = B'' \cup N'$ với $B'' = \mathbb{R} \setminus B'$ là tập Borel.

Vậy mỗi tập đo được Lebesgue chẳng qua là một tập Borel thêm hay bớt một tập có độ đo 0. □

Định lý 1.2.6. *Đối với một tập A trên $\mathbb{R}$ ba điều kiện sau là tương đương:*

- i) A đo được Lebesgue.
- ii) Với mỗi $\epsilon > 0$ có thể tìm được tập mở $G \supset A$ sao cho $\mu^*(G \setminus A) < \epsilon$.
- iii) Với mỗi $\epsilon > 0$ có thể tìm được một tập đóng $F \supset A$ sao cho $\mu^*(A \setminus F) < \epsilon$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Trước hết ta xét trường hợp $\mu(A) < \infty$. Từ định nghĩa độ đo ngoài, với $\epsilon > 0$ cho trước có thể tìm được một hệ khoảng mở Δ_k phủ A sao cho $\sum_k |\Delta_k| < \mu(A) + \epsilon$. Đương nhiên G là tập mở bao hàm A và có $\mu(G) \leq \sum_k |\Delta_k| < \mu(A) + \epsilon$. Từ đó $\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A)$, suy ra $\mu(G \setminus A) < \epsilon$.

Trong trường hợp tổng quát, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [-n, n]$ và mỗi tập $A_n = A \cap [-n, n]$ có $\mu(A_n) < \infty$, nên theo trên có những tập mở $G_n \supset A_n$ với $\mu(G_n \setminus A_n) < 1/2^n$. Khi ấy tập $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ mở, bao hàm A và thỏa mãn

$$\mu(G \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Cho G_n là tập mở bao hàm A và có $\mu^*(G_n \setminus A) < 1/n$. Đặt $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ta có $B \in \mathcal{L}$ (vì B là tập Borel) và $B \supset A$, đồng thời $\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(G_n \setminus A) < 1/n$ với

mọi $n = 1, 2, \dots$ cho nên $\mu^*(B \setminus A) = 0$, nghĩa là $E = B \setminus A$ đo được. Vậy $A = B \setminus E$ cũng đo được.

Do đó (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Mặt khác A đo được khi và chỉ khi phần bù của A cũng đo được, tức là từ điều vừa chứng minh, khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$ có thể tìm được một tập mở $G \supset (\mathbb{R} \setminus A)$ sao cho $\mu^*(G \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \epsilon$. Dĩ nhiên với F là phần bù của G thì $F \subset A$ và $\mu^*(A \setminus F) = \mu^*(G \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \epsilon$. Từ đó suy ra (i) $\Leftrightarrow$ (iii). $\square$

1.3 Hàm đo được Lebesgue

1.3.1 Hàm đo được Lebesgue

Định nghĩa 1.3.1. Hàm số $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ được gọi là đo được trên A với A là một tập đo được Lebesgue nếu

$$\forall a \in \mathbb{R}, E_1 = \{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{L}. \quad (1.3.4)$$

Định lý 1.3.1. Điều kiện (1.3.4) trong định nghĩa tương đương với các đẳng thức sau:

$$\forall a \in \mathbb{R}, E_2 = \{x \in A \mid f(x) > a\} \in \mathcal{L}. \quad (1.3.5)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, E_3 = \{x \in A \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{L}. \quad (1.3.6)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, E_4 = \{x \in A \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{L}. \quad (1.3.7)$$

Chứng minh. (1.3.4) $\Leftrightarrow$ (1.3.7) vì E_2 và E_4 bù nhau nên $E_4 \in \mathcal{L}$ vì $\mathcal{L}$ kín đối với phép lấy phần bù.

Tương tự (1.3.5) $\Leftrightarrow$ (1.3.6) vì E_2, E_3 bù nhau.

(1.3.4) $\Rightarrow$ (1.3.6). Thật vậy $f(x) \leq a$ khi và chỉ khi với mọi n có $f(x) < a + \frac{1}{n}$.

Nên với mọi n $\{x \in A : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{L}$,

vì $\{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{L}$.

Ngược lại (1.3.6) $\Rightarrow$ (1.3.4). Thật vậy $f(x) < a$ khi và chỉ khi mọi n có $f(x) \leq a - \frac{1}{n}$.
 Nên $\{x \in A : f(x) < a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in A : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{L}$, (vì $\{x \in A : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{L}$). $\square$

1.3.2 Các phép toán về hàm số đo được

Mệnh đề 1.3.1. Cho A là tập đo được Lebesgue.

- i) Nếu $f(x)$ đo được trên A thì với mọi $\alpha > 0$ hàm số $|f(x)|^\alpha$ cũng đo được.
 ii) Nếu $f(x), g(x)$ đo được trên A và hữu hạn thì các hàm số

$$f(x) \pm g(x), f(x).g(x), \max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$$

cũng đo được, và nếu $g(x)$ không triệt tiêu thì hàm số $1/g(x)$ cũng đo được.

Chứng minh. i) Nếu $f(x)$ đo được thì với mọi $a > 0$

$$\begin{aligned} \{x \in A : |f(x)|^\alpha < a\} &= \{x \in A : |f(x)| < a^{\frac{1}{\alpha}}\} \\ &= \{x \in A : -a^{\frac{1}{\alpha}} < f(x) < a^{\frac{1}{\alpha}}\} \\ &= \{x \in A : f(x) < a^{\frac{1}{\alpha}}\} \cap \{x \in A : f(x) > -a^{\frac{1}{\alpha}}\} \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

vì mỗi tập $\{x \in A : f(x) < a^{\frac{1}{\alpha}}\}$ và $\{x \in A : f(x) > -a^{\frac{1}{\alpha}}\}$ đều thuộc $\mathcal{L}$.

Nếu $a \leq 0$ thì $\{x \in A : |f(x)|^\alpha < a\} = \emptyset \in \mathcal{L}$. Vậy $|f(x)|^\alpha$ đo được.

- ii) Cho a là một số thực bất kỳ, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ là dãy các số hữu tỉ. Khi đó
 $f(x) + g(x) < a \Leftrightarrow f(x) < a - g(x)$.

Do tập hữu tỉ trù mật trong tập số thực nên tồn tại số hữu tỉ r_n sao cho
 $f(x) < r_n < a - g(x)$. Như vậy

$$\begin{aligned} \{x \in A : f(x) - g(x) < a\} &= \bigcup_n \{x \in A : f(x) < r_n < a - g(x)\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x \in A : f(x) < r_n\} \cap \{x \in A : g(x) < a - r_n\}] \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

vì mỗi tập $\{x \in A : f(x) < r_n\}, \{x \in A : g(x) < a - r_n\}$ đều thuộc $\mathcal{L}$.

Vậy $f(x) + g(x)$ là đo được. Tương tự ta có $f(x) - g(x)$ là đo được.

Ta có các hệ thức sau

$$f(x).g(x) = \frac{1}{4}[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2],$$

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|).$$

Vậy các hàm số $f(x).g(x), \max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$ cũng đo được. $\square$

Định lý 1.3.2. Cho A là một tập đo được Lebesgue, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots$ là những hàm đo được và hữu hạn trên A thì các hàm

$$\sup_n f_n(x), \inf_n f_n(x), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

cũng đo được trên A , và nếu hàm số $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ tồn tại thì nó cũng đo được.

Chứng minh. Chọn số thực a bất kỳ có

$$\{x \in A : \sup_n f_n(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{L},$$

$$\{x \in A : \inf_n f_n(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{L}.$$

Suy ra các hàm số $\sup_n f_n(x), \inf_n f_n(x)$ đo được.

Do đó ta có

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_n \left\{ \sup_k f_{n+k}(x) \right\},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n \left\{ \inf_k f_{n+k}(x) \right\},$$

cũng đo được.

Nếu dãy $f_n(x)$ hội tụ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ đo được. $\square$

1.3.3 Cấu trúc hàm đo được

Định nghĩa 1.3.2. Cho A là một tập bất kỳ trong không gian $\mathbb{R}$, ta gọi hàm đặc trưng của A là hàm số $\chi_A(x)$ xác định như sau

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin A, \\ 1 & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.3.3. Cho A là tập đo được Lebesgue, hàm $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm đơn giản nếu nó hữu hạn, đo được và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị. Gọi $f_1, f_2, \dots, f_n$ là các giá trị khác nhau của $f(x)$ và $A_i = \{x : f(x) = f_i\}$ thì tập A_i đo được, rời nhau và ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}(x).$$

Định lý 1.3.3. Mỗi hàm $f(x)$ đo được trên tập đo được A là giới hạn của một dãy hàm đơn giản $f_n(x)$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in A$ thì có thể chọn các f_n để cho

$$f_n(x) \geq 0, \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x),$$

với mọi n và mọi $x \in A$.

Chứng minh. Đặt $f(x) = 0$ với mọi $x \notin A$ ta có thể coi như $f(x)$ xác định và đo được trên toàn $\mathbb{R}$.

Nếu $f(x) \geq 0$. Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } f(x) \geq n, \\ \frac{i-1}{2^n} & \text{nếu } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} (i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n). \end{cases}$$

Rõ ràng $f_n(x)$ là hàm đơn giản và $f_n(x) \geq 0, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Ta cần chứng minh $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Nếu $f(x) < \infty$ thì với n đủ lớn $f(x) < n$, cho nên

$$\exists i : \quad \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n},$$

do đó $f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$. Suy ra $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nếu $f(x) = +\infty$ thì với mọi n , $f_n(x) \geq n$ cho nên $f_n(x) = n \rightarrow +\infty$.

Vậy $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Nếu $f(x)$ bất kỳ. Đặt $f^+(x) = \max\{f(x); 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x); 0\}$.

Ta có $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ và các hàm số $f^+(x), f^-(x)$ đều không âm nên từ chứng minh trên sẽ có hai dãy hàm đơn giản $f_n^+(x), f_n^-(x)$ hội tụ tới $f^+(x), f^-(x)$.

Do đó với mỗi hàm $f_n(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$ cũng đơn giản vì đo được và chỉ lấy một số hữu hạn giá trị suy ra $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. □

1.3.4 Hội tụ hầu khắp nơi

Định nghĩa 1.3.4. Cho A là một tập đo được Lebesgue. Một tính chất $\mathfrak{S}$ nào đó xảy ra hầu khắp nơi (h.k.n) trên A nếu tồn tại một tập hợp $B \subset A$, B đo được Lebesgue, $\mu(B) = 0$ sao cho tính chất $\mathfrak{S}$ xảy ra tại mọi x thuộc $A \setminus B$.

Định nghĩa 1.3.5. Hàm số $f(x), g(x)$ cùng xác định trên tập hợp A đo được Lebesgue được gọi là bằng nhau h.k.n trên A (hay tương đương nhau trên A) nếu tồn tại tập hợp $B \subset A$, B đo được Lebesgue và $\mu(B) = 0$ sao cho $f(x) = g(x)$ với mọi x thuộc $A \setminus B$.

Định nghĩa 1.3.6. Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ h.k.n về hàm số $f(x)$ trên $A \in \mathcal{L}$ nếu tồn tại một tập $B \subset A, B \in \mathcal{L}, \mu(B) = 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ với mọi $x \in A \setminus B$.

Định lý 1.3.4. Cho hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên tập $A \in \mathcal{L}$.

- i) Nếu $f(x), g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A và dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $f(x)$ trên A thì $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $g(x)$ trên A .
- ii) Nếu dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $f(x)$ trên A và $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $g(x)$ trên A thì $f(x)$ và $g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A .

Chứng minh.

- i) Vì $f(x)$ bằng $g(x)$ h.k.n nên tồn tại tập $B \subset A, B \in \mathcal{L}, \mu(B) = 0$ sao cho $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A \setminus B$.

Mặt khác, $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $f(x)$ trên A nên tồn tại tập $C \subset A, C \in \mathcal{L}, \mu(C) = 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ với mọi $x \in A \setminus C$.

Khi đó, $(B \cup C) \subset A, B \cup C \in \mathcal{L}, \mu(B \cup C) = 0$ và với mọi giá trị của $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = g(x)$. Vậy $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $g(x)$ trên A .

- ii) Do $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $f(x)$ trên A nên tồn tại tập $B \subset A, B \in \mathcal{L}, \mu(B) = 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ với mọi $x \in A \setminus B$.

Lại do $\{f_n\}$ hội tụ h.k.n về $g(x)$ trên A nên tồn tại tập $C \subset A, C \in \mathcal{L}, \mu(C) = 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ với mọi $x \in A \setminus C$.

Theo tính duy nhất của giới hạn dãy số, với mọi $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ phải có $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = g(x)$.

Mà $(B \cup C) \subset A, B \cup C \in \mathcal{L}, \mu(B \cup C) = 0$ nên $f(x)$ bằng $g(x)$ h.k.n trên A . $\square$

1.3.5 Sự hội tụ theo độ đo

Cho $A \in \mathcal{L}$ và $f_1, f_2, f_3, \dots$ là những hàm đo được hữu hạn h.k.n trên A . Dãy $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ theo độ đo đến $f(x)$ và ký hiệu là $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A nếu

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Nói cách khác $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \quad \text{thì} \quad \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \delta.$$

Định lý 1.3.5.

i) Nếu $f(x), g(x)$ đo được và $f(x), g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A , $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A thì $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A .

ii) Nếu $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A và $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A thì $f(x), g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A .

Chứng minh. i) Vì $f(x), g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A nên tồn tại một tập

$B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ có độ đo $\mu(B) = 0$ (vì $f(x), g(x)$ đo được nên $B \in \mathcal{L}$).

Với mọi $\epsilon > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in A : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \\ &= \{x \in A \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \cup \{x \in B : |f_n(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \\ &\subset \{x \in A \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \cup B. \end{aligned}$$

Mà $\{x \in A \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = \{x \in A \setminus B : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$,

nên $A_n \subset \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \cup B$. Suy ra

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &\leq \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) + \mu(B) \\ &= \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

vì $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A . Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Vậy $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A .

ii) Đặt $A_0 = \{x \in A : |f(x) - g(x)| > 0\} = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$,

$$A_\epsilon = \{x \in A : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}, \epsilon > 0,$$

$$A_k = \{x \in A : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\}, k \in \mathbb{N},$$

$$B_n = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}, n \in \mathbb{N},$$

$$C_n = \{x \in A : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}, n \in \mathbb{N}.$$

Các tập hợp này đều đo được vì $f_n(x), f(x), g(x)$ đều đo được trên A .

Ta cần chứng minh $\mu(A_0) = 0$. Trước hết ta chứng minh

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (1.3.8)$$

Lấy $x_0 \in A_0$, ta có $x \in A$ và $|f(x) - g(x)| > 0$.

Theo tính trù mật của tập số thực sẽ tồn tại số tự nhiên k_0 sao cho

$$|f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k_0} > 0,$$

suy ra $x \in A_{k_0}$. Do đó $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Ngược lại lấy $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ thì tồn tại số tự nhiên k_0 sao cho $x_0 \in A$.

Suy ra $x \in A$ và $|f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k_0}$ nên $|f(x) - g(x)| > 0$, do đó $x \in A_0$.

Vậy đẳng thức (1.3.8) được chứng minh. Khi đó ta có

$$\mu(A_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (1.3.9)$$

Bây giờ ta chứng minh

$$A_\epsilon \subset B_n \cup C_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0 \quad (1.3.10)$$

hay $A \setminus A_\epsilon \supset A \setminus (B_n \cup C_n) = (A \setminus B_n) \cap (A \setminus C_n)$. Thật vậy, lấy $x \in (A \setminus B_n) \cap (A \setminus C_n)$

Ta có $x \in A$ và $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, $|f_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Suy ra

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Do đó $x \in A \setminus A_\epsilon$. Vậy (1.3.10) được chứng minh.

Khi đó

$$\mu(A_\epsilon) \leq \mu(B_n) + \mu(C_n). \quad (1.3.11)$$

Mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0$.

Vì $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A , nên lấy giới hạn hai vế của (1.3.11) ta được $\mu(A_\epsilon) = 0$, với mọi $\epsilon > 0$.

Suy ra $\mu(A_k) = 0$, khi $\epsilon = \frac{1}{k} > 0$, với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Từ (1.3.9) ta có $\mu(A_0) = 0$. □

1.3.6 Mỗi liên hệ giữa hội tụ

Định lý 1.3.6. (Egorov) Cho một dãy hàm $\{f_n\}$ đo được, hữu hạn h.k.n, trên một tập đo được A có độ đo $\mu(A) < +\infty$. Với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một tập đo được $B \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus B) < \epsilon$ và dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên tập B .

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 1.3.1. Cho $\epsilon, \eta > 0$ thì có một tập đóng B là con của A và một số thực K sao cho $\mu(A \setminus B) < \eta$ và $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ với mọi $x \in B$ và $k > K$.

Chứng minh. Cố định $\epsilon, \eta > 0$. Cho m bất kỳ, đặt $A_m = \{x \in A : |f(x) - f_k(x)| < \epsilon \text{ với mọi } k > m\}$. Như vậy $A_m = \bigcap_{k > m} \{x \in A : |f(x) - f_k(x)| < \epsilon\}$ và A_m là đo được.

Rõ ràng $A_m \subset A_{m+1}$. Ngoài ra $f_k(x)$ hội tụ h.k.n đến hàm số $f(x)$ trên A và $f(x)$

là hữu hạn nên A_m tăng đến $A \setminus Z$ với $\mu(Z) = 0$. Do đó $\mu(A_m) \rightarrow \mu(A \setminus Z) = \mu(A)$.

Từ $\mu(A) < \infty$ ta thấy rằng $\mu(A \setminus A_m) \rightarrow 0$.

Chọn m_0 sao cho $\mu(A \setminus A_{m_0}) < \frac{1}{2}\eta$ và lấy B là tập đóng, $B \subset A_{m_0}$ với $\mu(A_{m_0} \setminus B) < \frac{1}{2}\eta$. Vậy $\mu(A \setminus B) < \eta$ và $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ trong B nếu $k > m_0$. $\square$

Chứng minh. (định lý Egorov) Chọn $\epsilon > 0$ áp dụng bổ đề 1.3.1 để chọn tập đóng $B_m \subset A$, $m \geq 1$ và số thực $K_{m,\epsilon}$ sao cho $\mu(A \setminus B_m) < \epsilon \frac{1}{2^m}$ và $|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}$ trong B_m nếu $k > K_{m,\epsilon}$. $B = \bigcap_m B_m$ là tập đóng và $B \subset B_m$ với mọi m nên $f_k(x)$ hội tụ đều tới $f(x)$ trên B .

Suy ra $A \setminus B = A \setminus \bigcap_m B_m = \bigcup_m (A \setminus B_m)$. Vậy $\mu(A \setminus B) \leq \sum \mu(A \setminus B_m) < \epsilon$. $\square$

Định lý 1.3.7. Nếu một dãy hàm $\{f_n\}$ đo được trên một tập A hội tụ h.k.n tới một hàm số $f(x)$ thì $f(x)$ đo được và nếu $\mu(A) < \infty$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Chứng minh. $\{f_n(x)\}$ hội tụ h.k.n tới $f(x)$ trên A nên tồn tại $B = \{x \in A : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$, $\mu(B) = 0$ và mọi tập con của B cũng đo được và có độ đo 0 (vì μ là độ đo đủ). Do đó $f(x)$ đo được trên B .

Mặt khác $f_n(x) \rightarrow f(x)$ với mọi $x \in A \setminus B$ nên theo định lý 1.3.2 $f(x)$ đo được trên $A \setminus B$.

Vậy $f(x)$ đo được trên $B \cup (A \setminus B) = A$.

Chọn $\epsilon > 0$ tùy ý. Với mọi n tồn tại i sao cho $|f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \epsilon$ suy ra $x \in B$, cho nên

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in A : |f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \right) \subset B,$$

do đó

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in A : |f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \right) \right) = 0.$$

Đặt $E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in A : |f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, ta có

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

vì $E_1 \subset A$ nên $\mu(E_1) \leq \mu(A) < \infty$ nên $\mu(\bigcap_{n=i}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$,

do đó $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in A : |f_{n+i}(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu(E_n) \rightarrow 0$.

Vậy $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Định lý 1.3.8. Nếu dãy hàm số đo được $f_n(x)$ hội tụ theo độ đo tới $f(x)$, thì có một dãy con $f_{n_k}(x)$ hội tụ h.k.n tới $f(x)$.

Chứng minh. Chọn dãy $g_k \rightarrow 0$ và dãy $t_k > 0$ sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < \infty$. Với mỗi k tồn tại một số tự nhiên $n(k)$ sao cho với mọi $n \geq n(k)$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq g_k\}) < t_k.$$

Đặt $n_1 = n(1), n_2 = \max\{n_1 + 1, n(2)\}, \dots$ ta sẽ có $n_1 < n_2 < \dots$ và dãy này hội tụ tới $+\infty$. Với mọi k ta có

$$\mu(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq g_k\}) < t_k.$$

Xét tập $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ với $Q_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq g_k\}$. Với mọi i ta có $B \subset Q_i$ cho nên

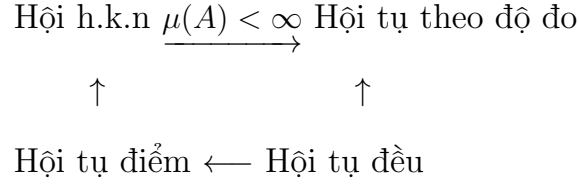
$$\mu(B) \leq \mu(Q_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq g_k\}) < \sum_{k=i}^{\infty} t_k.$$

Nhưng $\sum_{k=i}^{\infty} t_k \rightarrow 0$ khi $i \rightarrow \infty$, vì $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < \infty$, do đó $\mu(B) = 0$. Với mỗi $x \in A \setminus B$, có một i sao cho $x \notin Q_i$, tức là sao cho với mọi $k \geq i$

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < g_k.$$

vì $g_k \rightarrow 0$ nên $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ khi $k \rightarrow \infty$. □

Mối liên hệ giữa hội tụ



Ta có ví dụ về một hàm hội tụ h.k.n nhưng không hội tụ điểm.

Ví dụ 1.3.1. Cho $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$f_n(x)$ hội tụ h.k.n đến $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$.

Xét $x=1$ thì $f_n(1) = (-1)^n$ là dãy phân kỳ nên $f_n(x)$ không hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ về một hàm hội tụ theo độ đo nhưng không hội tụ đều.

Ví dụ 1.3.2. Cho $f_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}), \\ 2 & \text{khi } x \in [1 - \frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

và $f(x) = x$ trên $[0, 1)$.

Lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ. Xét $x \in [0, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$ thì $x \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$

Do đó tập các điểm $B_n = \{x \in [0, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$,

$\mu(B_n) \leq \mu([1 - \frac{1}{n}, 1)) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $f_n(x) \xrightarrow{\mu} 0$.

Lấy $x \in [0, 1)$, tồn tại n_0 sao cho $x < 1 - \frac{1}{n_0}$

Chọn $n_0 = \left\lceil \frac{1}{1-x} \right\rceil + 1$

Nếu $n > n_0$ thì $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ suy ra $f_n(x) = x = f(x)$

Do đó $f_n(x)$ hội tụ điểm đến $f(x)$ trên $[0, 1)$

$\sup_{[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.

$f_n(x)$ không hội tụ đều. Vậy $f_n(x)$ hội tụ theo độ đo nhưng không hội tụ đều.

Ta xét ví dụ về một hàm hội tụ h.k.n nhưng có độ đo là vô cùng thì sẽ không hội tụ theo độ đo.

Ví dụ 1.3.3. Cho f_n xác định trên $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in [n, n+1], \\ 0 & \text{tại các điểm khác,} \end{cases}$$

và hàm $f(x) = 0$.

Lấy $x \in \mathbb{R}$. Chọn $n_0 = [x] + 1$ thì với mọi $n > n_0$ tức là $n > [x] + 1 > x$ thì $f_n(x) = 0$.

Nên $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ hay $f_n(x)$ hội tụ h.k.n đến $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ và $\mu(\mathbb{R}) = \infty$

Chọn $\epsilon = \frac{1}{2}$ thì

$$|f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2} \quad \text{khi } x \in [n, n+1].$$

Do đó $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}\} = [n, n+1]$.

$\mu(B_n) = 1 \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$, hay $f_n(x)$ không hội tụ theo độ đo đến $f(x) = 0$.

Vậy $f_n(x)$ hội tụ h.k.n trên $\mathbb{R}$ nhưng $f_n(x)$ không hội tụ theo độ đo.

1.4 Tích phân Lebesgue

1.4.1 Tích phân của hàm đơn giản

Định nghĩa 1.4.1. Cho A là tập đo được, $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ là hàm đơn giản, đo được trên A . Gọi $f_1, f_2, \dots, f_n$ là các giá trị khác nhau đôi một của $f(x)$.

Đặt $A_k = \{x \in A : f(x) = f_k\}, k = 1, \dots, n$.

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ và } f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \chi_{A_k}, \forall x \in A.$$

Khi đó tích phân của hàm đơn giản $f(x)$ trên A với độ đo μ là số

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n f_k \mu(A_k).$$

Ví dụ 1.4.1. Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{khi } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó $\int_{[0,1]} f(x) d\mu = 1 \cdot \mu([0, 1] \cap \mathbb{R}) + 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

1.4.2 Tích phân của hàm không âm

Cho A là tập đo được Lebesgue, hàm $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ là hàm đo được. Khi đó tồn tại dãy đơn điệu tăng các hàm đơn giản đo được $f_n(x) \geq 0$ hội tụ h.k.n về $f(x)$ trên A .

Định nghĩa 1.4.2. Tích phân của hàm $f(x)$ trên A đối với độ đo μ là

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_A f_n(x) d\mu \right).$$

1.4.3 Tích phân của hàm có dấu bất kỳ

Định nghĩa 1.4.3. Cho A là tập đo được Lebesgue, hàm $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đo được trên A . Khi đó ta có

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{với } f^+(x), f^-(x) \geq 0.$$

Các hàm số $f^+(x), f^-(x)$ có tích phân tương ứng trên A là $\int_A f^+(x) d\mu, \int_A f^-(x) d\mu$. Nếu hiệu $\int_A f^+(x) d\mu - \int_A f^-(x) d\mu$ có nghĩa thì tích phân của hàm đo được $f(x)$ trên A với độ đo μ là

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A f^+(x) d\mu - \int_A f^-(x) d\mu.$$

1.4.4 Các tính chất sơ cấp

1. Cộng tính

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\int_{A \cup B} f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu$.

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm đơn giản trên $A \cup B$.

Tồn tại $f_1, f_2, \dots, f_n$ là các giá trị khác nhau đôi một của $f(x)$.

Đặt $E_k = \{x \in A \cup B : f(x) = f_k\}, k = 1, \dots, n$ thế thì $\bigcup_{k=1}^n E_k = A \cup B$.

Ta có $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \chi_{E_k}(x)$, $E_k = (A \cup B) \cap E_k = (A \cap E_k) \cup (B \cap E_k)$.

Vì $A \cap B = \emptyset$ nên $A \cap E_k, B \cap E_k$ rời nhau. Do đó

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f(x) d\mu &= \sum_{k=1}^n f_k(x) \mu(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(x) \mu(A \cap E_k) + \sum_{k=1}^n f_k(x) \mu(B \cap E_k) \\ &= \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu. \end{aligned}$$

Nếu $f(x) > 0$ trên tập $A \cup B$, $f_n(x)$ là dãy hàm đơn giản không âm và hội tụ tới $f(x)$ tại mọi điểm $x \in A \cup B$.

Theo chứng minh trên

$$\int_{A \cup B} f_n(x) d\mu = \int_A f_n(x) d\mu + \int_B f_n(x) d\mu.$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A \cup B} f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) d\mu$.

Hay $\int_{A \cup B} f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu$.

Nếu $f(x)$ có dấu bất kỳ.

Ta đặt $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

$$\int_{A \cup B} f(x) d\mu = \int_{A \cup B} f^+(x) d\mu - \int_{A \cup B} f^-(x) d\mu.$$

Theo chứng minh trên thì

$$\int_{A \cup B} f^+(x) d\mu = \int_A f^+(x) d\mu + \int_B f^+(x) d\mu. \quad (1.4.12)$$

$$\int_{A \cup B} f^-(x) d\mu = \int_A f^-(x) d\mu + \int_B f^-(x) d\mu. \quad (1.4.13)$$

Lấy (1.4.12)-(1.4.13) ta có

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f(x) d\mu &= \int_A f^+(x) d\mu - \int_A f^-(x) d\mu + \int_B f^+(x) d\mu - \int_B f^-(x) d\mu \\ &= \int_A f(x) d\mu + \int_B f(x) d\mu. \end{aligned}$$

□

2. Bảo toàn thứ tự

Nếu $f(x), g(x)$ bằng nhau h.k.n trên A thì $\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu$.

3. Tuyến tính

i) $\int_A c \cdot f(x) d\mu = c \int_A f(x) d\mu$ (c là hằng số).

ii) $f(x) + g(x)$ xác định h.k.n trên A thì

$$\int_A (f(x) + g(x)) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu.$$

4. Khả tích

i) Nếu $\int_A f(x) d\mu$ có nghĩa thì $|\int_A f(x) d\mu| \leq \int_A |f(x)| d\mu$.

ii) $f(x)$ khả tích khi và chỉ khi $|f(x)|$ khả tích.

iii) Nếu $|f(x)| \leq g$ h.k.n trên A và $g(x)$ khả tích thì $f(x)$ cũng khả tích.

iv) Nếu $f(x), g(x)$ khả tích thì $f(x) \pm g(x)$ cũng khả tích. Nếu $f(x)$ khả tích, $g(x)$ bị chặn thì $f(x).g(x)$ cũng khả tích.

Chứng minh. i) Ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) d\mu \right| &= \left| \int_A f^+(x) d\mu - \int_A f^-(x) d\mu \right| \\ &\leq \int_A f^+(x) d\mu + \int_A f^-(x) d\mu \\ &= \int_A (f^+(x) + f^-(x)) d\mu = \int_A |f(x)| d\mu. \end{aligned}$$

ii) Nếu $|f(x)|$ khả tích thì $\int_A |f(x)| d\mu < +\infty$ suy ra $\left| \int_A f(x) d\mu \right| < +\infty$ hay $f(x)$ khả tích.

Nếu $f(x)$ khả tích, $\int_A f^+(x) d\mu - \int_A f^-(x) d\mu < +\infty$ nên $\int_A f^+(x) d\mu < +\infty$, $\int_A f^-(x) d\mu < +\infty$.

Vậy $\int_A |f(x)| d\mu = \int_A (f^+(x) + f^-(x)) d\mu < +\infty$ hay $|f(x)|$ khả tích.

iii) Vì $|f(x)| \leq g(x)$ h.k.n trên A , $g(x)$ khả tích nên

$$\int_A |f(x)| d\mu \leq \int_A g(x) d\mu < +\infty.$$

Do đó $|f(x)|$ khả tích nên theo chứng minh trên $f(x)$ khả tích.

iv) Nếu $f(x), g(x)$ khả tích thì $\int_A f(x) d\mu, \int_A g(x) d\mu$ hữu hạn.

$\int_A (f(x) + g(x)) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$ hữu hạn hay $f(x) + g(x)$ khả tích.

Tương tự ta có $f(x) - g(x)$ khả tích.

Nếu $f(x)$ khả tích, $g(x)$ bị chặn. Giả sử $|g(x)| \leq m$.

Ta có $|f(x).g(x)| \leq m.|f(x)|$

nhên $\int_A |f(x).g(x)| d\mu \leq \int_A (m.|f(x)|) d\mu = m. \int_A |f(x)| d\mu.$

Mặt khác $f(x)$ khả tích nên $|f(x)|$ cũng khả tích (chứng minh trên).

Do đó $\int_A |f(x)| d\mu < \infty$ suy ra $\int_A |f(x)g(x)| d\mu < \infty$ hay $|f(x)g(x)|$ khả tích. Vậy $f(x)g(x)$ cũng khả tích. □

1.4.5 Qua giới hạn dưới dấu tích phân

Định lý 1.4.1. (hội tụ đơn điệu Beppo Levi) Nếu $f_n(x) \geq 0$ và $f_n(x)$ đơn điệu tăng đến $f(x)$ trên A thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Chứng minh. Nếu $f_n(x)$ là hàm đơn giản thì đây chính là định nghĩa tích phân của hàm đơn giản.

Nếu hàm $f_n(x)$ bất kỳ và đo được. Với mỗi n có một dãy hàm đơn giản, không âm $g_m^{(n)}(x) \nearrow f_n(x)$. Vì $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ nên có thể coi $g_m^{(n+1)}(x) \geq g_m^{(n)}(x)$.

Vậy với $k \leq n$ ta có

$$g_n^{(k)}(x) \leq g_n^{(n)}(x) \leq f_n(x), \int_A g_n^{(k)}(x) d\mu \leq \int_A g_n^{(n)}(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu,$$

cho $n \rightarrow \infty$ ta có $f_k(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}(x) \leq f(x)$ và

$$\int_A f_k(x) d\mu \leq \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}(x) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Cho $k \rightarrow \infty$ ta có $f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}(x) \leq f(x)$ và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k(x) d\mu \leq \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}(x) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Như vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{(n)}(x) = f(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$. □

Chú ý rằng có thể thay điều kiện $f_n(x) \geq 0$ bởi điều kiện $f_1(x)$ khả tích.

Định lý 1.4.2. (Định lý Dini) Nếu $f_n(x)$ là dãy hàm liên tục, đơn điệu, hội tụ điểm đến một hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f_n(x)$ hội tụ đều tới $f(x)$.

Chứng minh. Giả sử $f_n(x)$ là dãy hàm đơn điệu giảm.

Cho mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ thì $g_n(x)$ là hàm liên tục và $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$.

Hơn nữa $g_n(x) > g_{n+1}(x) > 0$. Gọi $M_n = \sup g_n(x) : x \in \mathbb{R}$. Ta cần chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$. Lấy $\epsilon > 0$, gọi $O_n = \{x_n : g_n^{-1}(x) < \epsilon\}$. Vì $g_n(x)$ là hàm liên tục nên tập O_n là tập mở. Từ $g_n(x) > g_{n+1}^{-1}(x)$ có $O_n \subset O_{n+1}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ sẽ có $n \in \mathbb{N}$ với $g_n(x) < \epsilon$ thì $x \in O_n$. Vậy $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \mathbb{R}$. Ta có $\mathbb{R}$ là compact nên họ tập mở O_n phủ $\mathbb{R}$ sẽ chứa một họ của O_n hữu hạn vẫn phủ $\mathbb{R}$. Từ $O_n \subset O_{n+1}$ nên sẽ có một tập hữu hạn lớn nhất phủ $\mathbb{R}$. Vậy tồn tại số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $O_N = \mathbb{R}$. Do đó $g_N(x) < \epsilon$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $M_N \leq \epsilon$. Từ M_n giảm với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên với mọi $M_n \geq 0$ ta sẽ có $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$. Như vậy nếu $f_n(x)$ hội tụ đều đến $f(x)$ trên tập A đo được thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$. $\square$

Ví dụ 1.4.2. Cho $f_n(x) = \frac{x+2}{x^n+1}$ với $x \in [0, 1]$.

Ta có $f_n(x) \geq 0$ với $x \in [0, 1]$ và $f_n(x)$ tăng đến hàm $f(x) = x+2$ trên $[0, 1]$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n d\mu = \int_{[0,1]} (x+2) d\mu.$$

Định lý 1.4.3. (Bổ đề Fatou) Nếu $f_n(x) \geq 0$ trên A thì

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Chứng minh. Đặt $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$.

Ta có $g_n(x) \geq 0$ và $g_n(x) \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, cho nên theo định lý 1.4.1 có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu = \int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu.$$

Nhưng $g_n(x) \leq f_n(x)$ nên $\int_A g_n(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$.

Do đó $\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$. $\square$

Định lý 1.4.4. (hội tụ chặn Lebesgue) Nếu $|f_n(x)| \leq g(x)$, $g(x)$ khả tích và $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (h.k.n hay theo độ đo) trên A thì

$$\int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu.$$

Chứng minh. Trường hợp $f_n(x) \rightarrow f(x)$ h.k.n trên A .

Ta có $-g(x) \leq f_n(x) \leq g(x)$ và $g(x)$ khả tích. Theo bổ đề Fatou cho các hàm $g(x) - f_n(x) \geq 0$ và $f_n(x) + g(x) \geq 0$ ta có

$$\int_A \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu, \quad \int_A \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Nhưng $f_n(x) \rightarrow f(x)$ h.k.n trên A nên $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, nên

$$\int_A f(x) d\mu \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \geq \int_A f(x) d\mu,$$

suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$.

Trường hợp $f_n \rightarrow f$ theo độ đo. Theo định nghĩa giới hạn trên ta có một dãy n_k sao cho $\int_A f_{n_k}(x) d\mu \rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$.

Mặt khác do $f_n(x) \rightarrow f(x)$ theo độ đo nên có thể trích ra một dãy con n_{k_i} hội tụ h.k.n đến $f(x)$ (theo định lý 1.3.8) hay $f_{n_{k_i}}(x) \rightarrow f(x)$ h.k.n. Do đó

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{n_k}(x) d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_{n_{k_i}}(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Tương tự ta có

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu,$$

cho nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$. □

Như đã học, chuyển giới hạn qua dấu tích phân thì điều kiện cần là dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều đến $f(x)$ trên một đoạn $[a, b]$. Đây là một điều kiện ngặt nghèo. Trong khi điều kiện hội tụ đơn điệu và hội tụ chặn thì rộng rãi hơn.

Ví dụ 1.4.3. Cho hàm $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{nx}e^{-nx^2}$.

Với mọi $x \in [0, 1]$ ta có $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nx}e^{-nx^2} = 0$.

$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} \sqrt{nx}e^{-nx^2} = (2e)^{-1} \not\rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Như vậy $f_n(x)$ không hội tụ đều đến $f(x)$ trên $[0, 1]$. Mặt khác $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{n} x e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-n}}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Lý do có dấu " = " xảy ra là vì $0 \leq f_n(x) \leq g(x) = (2e)^{-1} \quad x \in [0, 1]$, $g(x)$ là một hàm khả tích và $f_n(x) \rightarrow f(x)$ trên $[0, 1]$ nên $f_n(x), f(x)$ thỏa mãn điều kiện của định lý hội tụ chặn. Như vậy ta có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân.

1.4.6 Mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue và Rie mann

Định lý 1.4.5. Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Nếu f khả tích Riemann trên $[a, b]$ thì khả tích Lebesgue trên $[a, b]$ và

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_a^b f(x) dx$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ khả tích Riemann trên đoạn $[a, b]$ thì $f(x)$ bị chặn và liên tục h.k.n trên $[a, b]$.

Xét dãy phân hoạch D_n của đoạn $[a, b]$ với $\|D_n\| \rightarrow 0$. Gọi S_n là tổng Darboux dưới ứng với phân hoạch D_n .

Gọi Δ_i là phân hoạch thứ i của phân hoạch D_n trên $[a, b]$.

$$S_n = \sum_{i=1}^n t_i |\Delta_i| \quad t_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x).$$

Đặt $f_n(x) = \sum_{i=1}^n t_i \chi_{\Delta_i}(x)$. Ta có $f(x)$ liên tục h.k.n trên $[a, b]$, với n đủ lớn thì $\|D_n\| \rightarrow 0$ và do đó Δ_i sẽ đủ nhỏ để

Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - t_i| < \epsilon$. Suy ra $f_n(x) \rightarrow f(x)$ h.k.n trên $[a, b]$. Do đó theo định lý về hội tụ chặn ta có

$$S_n = \int_{[a,b]} f_n(x) d\mu \rightarrow \int_{[a,b]} f(x) d\mu.$$

Mặt khác $S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Vậy $\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_a^b f(x) dx$. □

Tuy nhiên một hàm khả tích Lebesgue thì không kết luận được sẽ khả tích Riemann. Ta có ví dụ 1.4.1 về hàm Dirichlet khả tích Lebesgue trên $[0, 1]$ nhưng không khả tích Riemann trên đó.

Ví dụ 1.4.4. Cho hàm số $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{khi } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta sẽ đi chứng minh hàm Dirichlet không khả tích Riemann.

Thật vậy, với mọi phân hoạch T của đoạn $[0, 1]$, gọi Δ_i là phân hoạch thứ i của T . Nếu lấy ξ là điểm có tọa độ là những số hữu tỉ thì $\sigma_D(T, \xi) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) |\Delta_i| = 1$ còn nếu lấy ξ' là điểm có tọa độ là những số vô tỉ thì $\sigma_D(T, \xi') = 0$ nên hàm Dirichlet không khả tích Riemann. $\square$

Chương 2

Không gian L^p

2.1 Không gian L^p

Cho không gian $\mathbb{R}$, E là tập đo được Lebesgue và một độ đo μ .

Định nghĩa 2.1.1. [1] Họ các hàm số $f(x)$ có lũy thừa bậc p ($1 \leq p < \infty$) của modul khả tích trên E , tức là sao cho

$$\int_E |f(x)|^p d\mu < \infty,$$

gọi là không gian $L^p(E)$.

Hàm số $f(x)$ đo được trên E gọi là bị chặn cốt yếu nếu tồn tại một tập hợp P có độ đo 0, sao cho $f(x)$ bị chặn trên tập hợp $E \setminus P$, tức là tồn tại số K sao cho

$$|f(x)| \leq K \quad \text{với mọi } x \in E \setminus P.$$

Cận dưới đúng của tập hợp các số K thỏa mãn bất đẳng thức trên gọi là cận trên đúng cốt yếu của hàm $f(x)$, được ký hiệu là $\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|$.

Định nghĩa 2.1.2. [2] Họ tất cả các hàm $f(x)$ bị chặn cốt yếu trên E được gọi là không gian $L^\infty(E)$.

Mệnh đề 2.1.1. [2] Nếu hàm $f(x) \in L^\infty(E)$ thì

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \quad \text{h.k.n trên } E.$$

Chứng minh. Giả sử $\{K_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu giảm đến $K = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|$.

Khi đó, tập hợp

$$P_n = \{x \in E : |f(x)| > K_n\},$$

có độ đo 0 với mọi n . Hiển nhiên tập hợp $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ có độ đo 0 và

$$|f(x)| \leq K \quad \text{với mọi } x \in E \setminus P.$$

Vậy $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|$ h.k.n trên E . □

Định lý 2.1.1. [1] (Bất đẳng thức Holder) Nếu $f(x), g(x)$ đo được, xác định trên một tập đo được E và p, q là hai số thực sao cho $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)| d\mu \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cách chứng minh dựa vào bổ đề sau

Bổ đề 2.1.1. Nếu a, b không âm và p, q là hai số thực sao cho $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì ta có

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Chứng minh. Xét $f(t) = \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p}$ ($t \geq 0$).

Ta thấy $f(1) = 0$ và $f'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot t^{1/(p-1)}$ dương với $t > 1$, âm với $t < 1$, chứng tỏ rằng $f(t)$ đạt cực tiểu tại $t = 1$.

Do đó với mọi $t \geq 0$ ta có $\frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p} \geq 0$. Với $t = a^p b^{-q} \geq 0$ ta có

$$\frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{p/q} \geq 0 \quad \text{hay} \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0. \quad \square$$

Chứng minh. (Chứng minh bất đẳng thức Holder)

Nếu $\int_E |f(x)|d\mu, \int_E |g(x)|d\mu$ hữu hạn và dương. Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh với

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_E |g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Ta có

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)} + \frac{|g(x)|^q}{q \left(\int_E |g(x)|^q d\mu\right)}.$$

Lấy tích hai vế

$$\begin{aligned} \frac{\int_E |f(x)g(x)|d\mu}{\left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{\int_E |f(x)|^p d\mu}{p \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)} + \frac{\int_E |g(x)|^q d\mu}{q \left(\int_E |g(x)|^q d\mu\right)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Nếu $\int_E |f(x)|d\mu$ hoặc $\int_E |g(x)|d\mu$ bằng vô cùng thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $\int_E |f(x)|d\mu$ hoặc $\int_E |g(x)|d\mu$ bằng 0, chẳng hạn $\int_E |f(x)|d\mu = 0$ thì $f(x) = 0$ h.k.n trên E nên $f(x)g(x) = 0$ h.k.n trên E . Do đó bất đẳng thức đúng. $\square$

Định lý 2.1.2. [1](Bất đẳng thức Minkowski) Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm đo được trên E và $1 \leq p < \infty$ thì

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Chứng minh. Với $p=1$, bất đẳng thức đúng.

Xét với $1 < p < \infty$. Chọn q sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned}
 \int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu &\leq \int_E (|f(x)| + |g(x)|) \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \\
 &= \int_E |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu + \int_E |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \\
 &\leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\quad + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left| \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right| \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Từ đó

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

vì $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ nên $\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

Định lý 2.1.3. Tập hợp $L^p(E)$, trong đó không phân biệt các hàm bằng nhau h.k.n là một không gian vector định chuẩn, với các phép toán thông thường về cộng hàm số, nhân hàm số với số, và với chuẩn

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ khi } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \text{ khi } p = \infty.$$

Chứng minh. Với $1 \leq p < \infty$.

Giả sử $f(x), g(x) \in L^p(E)$. Ta có $|f(x) + g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}$

suy ra $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$.

Do đó $|f(x)|^p, |g(x)|^p$ khả tích thì $|f(x) + g(x)|^p$ cũng khả tích, hay

$$f(x) + g(x) \in L^p(E) \tag{2.1.1}$$

Mặt khác, nếu $f(x) \in L^p(E)$, α là số thực bất kỳ thì $|\alpha f(x)|^p = |\alpha|^p \cdot |f(x)|^p$ khả tích, nên

$$\alpha \cdot f(x) \in L^p(E) \quad (2.1.2)$$

Từ (2.1.1) và (2.1.2) suy ra $L^p(E)$ là không gian vector.

Ta lại có $\|f\|_p > 0$ khi $f(x) \neq 0$ và $\|f\|_p = 0$ khi $f(x) = 0$ h.k.n vì không phân biệt hai hàm bằng nhau h.k.n nên thỏa mãn tiên đề 1 về chuẩn.

$$\|\alpha \cdot f\|_p = \left(\int_E |\alpha f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|f\|_p,$$

thỏa mãn điều kiện thuần nhất của chuẩn.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có bất đẳng thức tam giác

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

Với $p = +\infty$. Giả sử $f(x) \in L^\infty(E)$.

Ta có $\|f\|_\infty > 0$ nếu $f(x) \neq 0$ và $\|f\|_\infty = 0$ nếu $f(x) = 0$ h.k.n trên E nên thỏa mãn tiên đề 1 về chuẩn.

Ta đi chứng minh điều kiện thuần nhất của chuẩn. Với α là số thực bất kỳ ta cần chứng minh

$$\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty. \quad (2.1.3)$$

Nếu $\alpha = 0$ thì điều kiện (2.1.3) luôn đúng.

Nếu $\alpha \neq 0$. Giả sử phản chứng $\|\alpha \cdot f\|_\infty < M < |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$. Ta có

$$|\alpha| \cdot |f(x)| = |\alpha \cdot f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |\alpha \cdot f(x)| < M.$$

Do đó $\alpha \cdot f(x) \in L^\infty(E)$ và $|\alpha| \cdot \|f\|_\infty < M$. Như vậy thì $|\alpha| \cdot \|f\|_\infty < M < |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$.

Điều này vô lý. Chứng minh một cách tương tự ta cũng có $|\alpha| \cdot \|f\|_\infty < M < \|\alpha \cdot f\|_\infty$

là điều vô lý hay $\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$.

Cuối cùng ta đi chứng minh điều kiện về bất đẳng thức tam giác.

Thật vậy, giả sử $f(x), g(x) \in L^\infty(E)$.

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_E |g(x)| \text{ nên } f(x) + g(x) \in L^\infty(E).$$

$$\text{Và } \operatorname{ess\,sup}_E |f(x) + g(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_E |g(x)| \text{ hay } \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

Định lý 2.1.4. $L^p(E)$ là không gian vector định chuẩn đủ.

Chứng minh. Cho $f_n(x)$ là dãy cơ bản trong $L^p(E)$, tức là $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0$. Như vậy luôn tìm được n_1 đủ lớn để cho $\|f_n - f_m\|_p < 1/2$ với mọi $n, m \geq n_1$. Tiếp tục tìm được $n_2 > n_1$ sao cho $\|f_n - f_m\|_p < 1/2^2$ với mọi $n, m \geq n_2$. Do đó ta có thể chọn được một dãy $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ để cho với mọi k ta có

$$\forall n, m \geq n_k \quad \|f_n - f_m\|_p < 1/2^k.$$

Như vậy $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1/2^k$. Áp dụng bổ đề Fatou (1.4.3) cho dãy hàm không âm $g_s(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^s |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in L^p(E)$.

Với mỗi x cố định $g_s(x)$ không giảm theo s nên tồn tại $\lim_{s \rightarrow \infty} g_s(x)$.

$$\text{Do đó } \int_E \lim_{s \rightarrow \infty} (g_s(x))^p d\mu \leq \varliminf_{s \rightarrow \infty} \int_E (g_s(x))^p d\mu = \varliminf_{s \rightarrow \infty} (\|g_s\|_p)^p.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \|g_s\|_p &\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^s \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \\ &< \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^s (1/2^k) < \|f_{n_1}\|_p + 1. \end{aligned}$$

nhên $\lim_{s \rightarrow \infty} (\|g_s\|_p)^p < \infty$. Do đó $\int_E \lim_{s \rightarrow \infty} (g_s(x))^p d\mu < \infty$.

Điều này chứng tỏ $\lim_{s \rightarrow \infty} |g_s(x)|^p < \infty$ h.k.n, hay tồn tại $\lim_{s \rightarrow \infty} g_s(x)$ và hữu hạn h.k.n trên E .

Suy ra $f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ hội tụ tuyệt đối h.k.n.

Như vậy khi $s \rightarrow \infty$ sẽ tồn tại giới hạn hữu hạn h.k.n của hàm

$$f_{n_{s+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^s (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)).$$

Ta gọi giới hạn này là $f_0(x)$, $f_{n_{s+1}} \rightarrow f_0(x)$ h.k.n. Vì $|f_{n_{s+1}}(x)| \leq \lim_{s \rightarrow \infty} g_s(x) \in L^p(E)$.

Theo định lý hội tụ chặn có

$$\int_E |f_0(x)|^p d\mu = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_{s+1}}(x)|^p d\mu,$$

tức là $f_0(x) \in L^p(E)$. Áp dụng bổ đề Fatou ta có

$$\begin{aligned} \|f_0 - f_{n_k}\|_p &= \int_E \lim_{s \rightarrow \infty} |f_{n_{s+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_{s+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu = \lim_{s \rightarrow \infty} \|f_{n_{s+1}} - f_{n_k}\|_p \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\| \sum_{t=k}^s f_{n_{t+1}} - f_{n_k} \right\|_p \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{t=k}^s \|f_{n_{t+1}} - f_{n_k}\|_p \\ &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{t=k}^s \frac{1}{2^t} = \sum_{t=k}^{\infty} \frac{1}{2^t}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_0 - f_{n_k}\|_p = 0$. Cuối cùng vì $\{f_n\}$ là dãy cơ bản nên với n, n_k đủ lớn ta sẽ có $\|f_{n_k} - f_n\|_p < \epsilon$. Khi đó ta chọn k đủ lớn để vừa có $n_k \geq n_0$ và $\|f_0 - f_{n_k}\|_p < \epsilon$ thì sẽ có với mọi $n \geq n_0$

$$\|f_0 - f_n\|_p \leq \|f_0 - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p \leq \epsilon + \epsilon,$$

chứng tỏ dãy $f_n(x)$ hội tụ tới $f_0(x)$. □

Hệ quả 2.1.1. Nếu một dãy $\{f_n\}$ hội tụ trong $L^p(E)$ thì nó chứa một dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ h.k.n trên E .

Thật vậy, nếu $\{f_n\}$ hội tụ thì nó là dãy cơ bản nên theo định lý 2.1.4 có thể trích ra một dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ h.k.n.

Định lý 2.1.5. Nếu $1 \leq p < p' < \infty$ và $\mu(E) < \infty$ thì $L^{p'}(E) \subset L^p(E)$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{với } 1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ta lấy $g(x) = 1$, thay $f(x)$ bởi $|f(x)|^p$, thay p, q bởi $p'/p, p'/(p' - p)$ ta có

$$\| |f| \|_1 \leq \| |f|^p \|_{\frac{p'}{p}} \cdot \mu(E)^{\frac{p'-p}{p}}.$$

Do đó $\mu(E) < \infty$ thì $L^{p'}(E) \subset L^p(E)$. □

Ta có các ví dụ sau trích từ tài liệu [5]

Ví dụ 2.1.1. Cho $p < q < \infty$, hàm $x^{-\frac{1}{q}} \in L^p(0, 1)$ nhưng $|x^{-\frac{1}{q}}|^q = |\frac{1}{x}|$ là hàm không khả tích trên $(0, 1)$ nên $x^{-\frac{1}{q}} \notin L^q(0, 1)$.

Ví dụ sau đây cho thấy nếu độ đo $\mu(E) = \infty$ thì định lý trên không đúng.

Ví dụ 2.1.2. Cho hàm $f(x) = x^{-\frac{1}{p}} \in L^q(1, \infty)$ với $1 < p < q$.

Nhưng $|x^{-\frac{1}{p}}|^p = |\frac{1}{x}|$ không thuộc $L^1(1, \infty)$ nên $x^{-\frac{1}{p}} \notin L^p(1, \infty)$.

Sự hội tụ trong $L^p(E)$ được gọi là hội tụ trung bình cấp p .

Ký hiệu là $f_n(x) \xrightarrow{L^p} f(x)$.

Mệnh đề 2.1.2. Một dãy hội tụ trung bình thì cũng hội tụ theo độ đo.

Chứng minh. Với mọi số $\epsilon > 0$, đặt $B = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$, ta có

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \int_B |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \geq \int_B \epsilon^p d\mu = \epsilon^p \cdot \mu(B),$$

điều này chứng tỏ rằng $\mu(B) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, nếu $f_n(x) \xrightarrow{L^p} f(x)$. □

Mối quan hệ giữa hội tụ

Hội tụ hầu khắp nơi $\xrightarrow{\mu(A) < \infty}$ Hội tụ theo độ đo

$\Uparrow$

$\Uparrow$

Hội tụ trung bình

($\Uparrow$ chỉ ra rằng có thể trích ra một dãy con hội tụ).

Một hàm hội tụ trung bình thì hội tụ theo độ đo nhưng điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 2.1.3. Xét dãy hàm $f_n(x)$ trên đoạn $[0, 1]$ được xác định như sau

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{nếu } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

và hàm $f(x) = 0$.

Ta có

$$\mu(\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = \mu\left([0, \frac{1}{n}]\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Do đó $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$.

Tuy nhiên, $\int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = n \cdot \mu\left([0, \frac{1}{n}]\right) = 1 \not\rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $f_n(x)$ không hội tụ trung bình đến $f(x)$ trên $[0, 1]$.

Ví dụ sau cho thấy một hàm hội tụ h.k.n nhưng không hội tụ trung bình.

Ví dụ 2.1.4. Cho hàm $f_n(x)$ xác định trên $[0, 1]$

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2},$$

và hàm $f(x) = 0$.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + nx^2} = 0$. Do đó $f_n(x)$ hội tụ

h.k.n đến $f(x) = 0$ trên $[0, 1]$. Tuy nhiên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx.$$

Đặt $u = nx$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{1+u^2} du = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan u)|_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $f_n(x)$ không hội tụ trung bình về $f(x) = 0$.

2.2 Tính tách được của L^p

Định lý 2.2.1. *Mỗi họ hàm sau đây là trù mật trong $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$.*

1. Các hàm đơn giản.

2. Các hàm liên tục.

Chứng minh. Họ các hàm gọi là trù mật trong $L^p(E)$ nếu với mọi $f(x) \in L^p(E)$ và mọi $\epsilon > 0$, đều tồn tại một hàm $g(x)$ thuộc họ đó sao cho $\|f - g\|_p < \epsilon$.

a) Xét một hàm bất kỳ $f(x) \in L^p(E)$.

Ta có $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$, với $f^+(x), f^-(x) \geq 0$.

Tồn tại một dãy hàm đơn giản không âm $f_n^+(x) \nearrow f^+(x)$.

Vì $(f^+(x) - f_n^+(x))^p \searrow 0$ nên

$$\int_E (f^+(x) - f_n^+(x))^p d\mu \searrow \int_E 0 d\mu = 0,$$

nghĩa là $\|f^+ - f_n^+\|_p \rightarrow 0$.

Vậy với n đủ lớn ta sẽ có một hàm đơn giản $f_n^-(x)$ với $\|f^- - f_n^-\|_p < \frac{\epsilon}{2}$.

Khi ấy đặt $g(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$ ta sẽ được $\|f - g\|_p \leq \|f^+ - f_n^+\|_p + \|f^- - f_n^-\|_p < \epsilon$.

Hàm $g(x)$ là hiệu của hai hàm đơn giản nên cũng là hàm đơn giản.

Do đó họ các hàm đơn giản trù mật trong $L^p(E)$.

b) Ta xét hàm số có dạng $\chi_A(x)$ trong đó A đo được. Theo định lý 1.2.6 với mọi

$\epsilon > 0$ tồn tại một tập mở $G \supset A$ và một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(G \setminus A) < \frac{\epsilon^p}{2}$, $\mu(A \setminus F) < \frac{\epsilon^p}{2}$, tức là $\mu(G \setminus F) < \epsilon^p$. Ta lấy

$$g(x) = \frac{\rho(x, \mathbb{R} \setminus G)}{\rho(x, \mathbb{R} \setminus G) + \rho(x, F)}.$$

Trong đó $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ chỉ khoảng cách từ x đến M . Rõ ràng $x \in \mathbb{R} \setminus G$ thì $\rho(x, \mathbb{R} \setminus G) = 0$ nên $g(x) = 0$. Với $x \in F$ thì $\rho(x, \mathbb{R} \setminus G) \neq 0, \rho(x, F) = 0$ nên $g(x) = 1$. Hàm $\rho(x, \mathbb{R} \setminus G), \rho(x, F)$ đều liên tục và có tổng khác 0 nên $g(x)$ cũng liên tục. Hiệu $\mathcal{X}_A(x) - g(x)$ có giá trị gồm 0 và 1 trên tập $G \setminus F$ và bằng 0 ngoài tập đó. Cho nên

$$\|\mathcal{X}_A - g\|_p = \left(\int_E (\mathcal{X}_A(x) - g(x))^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Do đó mỗi hàm có dạng $\mathcal{X}_A(x)$ với A đo được đều có thể xấp xỉ tùy ý bởi một hàm liên tục. Suy ra họ các hàm liên tục trù mật trong họ các hàm đơn giản, vì mỗi hàm đơn giản có dạng $\sum_{i=1}^v \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x)$ chỉ việc chọn hàm liên tục $g_i(x)$ sao cho $\|\mathcal{X}_{A_i} - g_i\|_p < \frac{\epsilon}{v|\alpha_i|}$, thì sẽ được hàm liên tục $g(x) = \sum \alpha_i g_i(x)$ với $\|\sum \alpha_i \mathcal{X}_{A_i} - g\|_p \leq \sum_1^v \alpha_i \|\mathcal{X}_{A_i} - g_i\|_p < \epsilon$.

Mặt khác một họ M trù mật trong $L^p(E)$ và một họ N trù mật trong M thì họ N cũng trù mật trong $L^p(E)$. Vậy họ các hàm liên tục trù mật trong $L^p(E)$. $\square$

Định lý 2.2.2. Không gian $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$ tách được (nghĩa là chứa một tập con đếm được trù mật trong nó).

Chứng minh. Lấy $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$. Gọi $f_{n_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định

$$f_{n_0}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } |x| < n_0, \\ 0 & \text{khi } |x| \geq n_0. \end{cases}$$

thì $f_{n_0}(x) \rightarrow f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ khi $n \rightarrow \infty$.

Như vậy tồn tại số n_0 sao cho $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \frac{\epsilon}{3}$ và tồn tại hàm liên tục

$g_{n_0} : [-n_0, n_0] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$\left(\int_{-n_0}^{n_0} |f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3} \text{ hay } \|f_{n_0} - g_{n_0}\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Mặt khác theo định lý Weierstrass tồn tại một hàm $P(x)$ sao cho

$$P(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \alpha_k x^k & \text{khi } |x| \leq n, \\ 0 & \text{khi } |x| > n. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

với $\alpha_k \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}$ sao cho $\max_{[-n_0, n_0]} |g_{n_0}(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{c}$. Như vậy

$$\left(\int_{-n_0}^{n_0} |g_{n_0}(x) - P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{c} (2n_0)^{\frac{1}{p}}.$$

Khi đó chọn $c = 3(2n_0)^{\frac{1}{p}}$ thì $\left(\int_{-n_0}^{n_0} |g_{n_0}(x) - P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}$.
thì $\|g_{n_0} - P\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Do đó

$$\begin{aligned} \|f - P\|_p &\leq \|f - f_{n_0}\|_p + \|f_{n_0} - g_{n_0}\|_p + \|g_{n_0} - P\|_p \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Vậy họ $\mathcal{P} = \{P(x) | P(x) \text{ có dạng (2.2.4), } \alpha_k \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $L^p(\mathbb{R})$ mà họ này đếm được nên $L^p(\mathbb{R})$ tách được. $\square$

Định lý 2.2.3. Không gian $L^\infty(\mathbb{R})$ không tách được.

Chứng minh. [6] Giả sử $L^\infty(\mathbb{R})$ tách được, tức là có một tập đếm được $\{u_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ trong $L^\infty(\mathbb{R})$ sao cho bất kỳ hàm $f(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ nào cũng có một dãy phần tử $\{u_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ của tập đếm được $\{u_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ sao cho

$$u_{n_k}(x) \xrightarrow{L^\infty} f(x) \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Với mỗi $a \in \mathbb{R}$ đặt $r_a = |a|$ và hàm

$$v_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in (a - r_a, a + r_a) \\ 0 & \text{khi } x \notin (a - r_a, a + r_a). \end{cases}$$

Lại có với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq b$ thì hiệu đối xứng

$$(a - r_a, a + r_a) \Delta (b - r_b, b + r_b) \neq \emptyset,$$

nên $\|v_a(x) - v_b(x)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |v_a(x) - v_b(x)| = 1$.

Do đó $u_a(x) \neq u_b(x)$ h.k.n trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, vì nếu $u_a(x) = u_b(x)$ thì

$$\begin{aligned} \|v_a - v_b\|_\infty &\leq \|v_a - u_b\|_\infty + \|u_b - v_b\|_\infty \\ &\leq \|v_a - u_b\|_\infty + \|u_b - v_b\|_\infty \\ &= \|v_a - u_a\|_\infty + \|u_b - v_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

điều này vô lý. Như vậy có một đơn ánh $f : \mathbb{R} \rightarrow \{u_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ sao cho $f(a) = u_a$. Điều này vô lý vì lực lượng của $\mathbb{R}$ là không đếm được còn lực lượng của $\{u_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ là đếm được.

Vậy $L^\infty(\mathbb{R})$ là không tách được. □

2.3 Biến đổi Fourier

Hàm số phức đo được Lebesgue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ được hiểu là $f(x) = u(x) + iv(x)$ với $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thực và đo được Lebesgue. Khi đó tích phân Lebesgue của $f(x)$ là

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} u(x) d\mu + i \int_{\mathbb{R}} v(x) d\mu.$$

Ta nói $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ nếu $u(x), v(x) \in L^p(\mathbb{R})$.

2.3.1 Biến đổi Fourier trong L^1

Cho không gian $\mathbb{R}$, hàm $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Biến đổi Fourier của hàm $f(x)$, ký hiệu $\mathcal{F}f$, là hàm được xác định bởi

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) d\mu,$$

và biến đổi ngược của hàm $f(x)$, ký hiệu là $\mathcal{F}f^{-1}$, là hàm xác định bởi

$$\mathcal{F}f^{-1}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x) d\mu,$$

Vì $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ và $|e^{-ix\xi}| = 1$ nên $\mathcal{F}f(\xi), \mathcal{F}f^{-1}(\xi)$ là xác định và ta có

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi)| &= \left| (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) d\mu \right| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi} f(x)| d\mu \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{F}f(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$ hay $\mathcal{F}f(\xi)$ là ánh xạ từ $L^1(\mathbb{R})$ và $L^\infty(\mathbb{R})$.

Ta đi chứng minh $\mathcal{F}f(\xi)$ là ánh xạ liên tục. Thật vậy

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f(\xi_0)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi} - e^{-ix\xi_0}| \cdot |f(x)| d\mu \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi_0}| \cdot |e^{-ix(\xi-\xi_0)} - 1| \cdot |f(x)| d\mu \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| < R} |e^{-ix(\xi-\xi_0)} - 1| \cdot |f(x)| d\mu \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > R} |e^{-ix(\xi-\xi_0)} - 1| \cdot |f(x)| d\mu. \end{aligned}$$

Do $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ nên $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu < \infty$. Đặt

$$\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| > R \\ f(x) & \text{còn lại} \end{cases}$$

Ta có $\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)|f(x)| \rightarrow |f(x)|$ khi $R \rightarrow \infty$. Mà $\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)|f(x)| < |f(x)|$ và $|f(x)|$ khả tích nên theo định lý về hội tụ chặn thì $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{[-R,R]}|f(x)| \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|$ khi $R \rightarrow \infty$.

Do đó tồn tại R_0 sao cho

$$\int_{|x| > R_0} |f(x)| d\mu < \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{4}.$$

Lại có $|e^{-ix(\xi-\xi_0)} - 1| < 2$ nên $\int_{|x|>R_0} |e^{-ix(\xi-\xi_0)} - 1| \cdot |f(x)| d\mu < \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2}$.

Mặt khác e^{iz} liên tục tại $z = 0$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho $|z| < \delta_1$ thì

$$|e^z - 1| < \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2\|f\|_1},$$

nhên với $|x| < R_0$ và $|(\xi - \xi_0)| < \frac{\delta_1}{R_0}$ thì

$$\int_{|x|<R_0} |e^{-ix(\xi-\xi_0)}| \cdot |f(x)| d\mu < \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2\|f\|_1} \int_{|x|<R_0} |f(x)| d\mu < \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2}$$

Vậy với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \frac{\delta_1}{R_0} > 0$ sao cho $|\xi - \xi_0| < \delta$ thì

$$|\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f(\xi_0)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{2\pi} \frac{\epsilon}{2} \right) = \epsilon.$$

Vậy $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

2.3.2 Biến đổi Fourier trong L^p

Ta xây dựng biến đổi Fourier trong $L^p(\mathbb{R})$ như sau. Đặt

$$\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| > R \\ f(x) & \text{còn lại.} \end{cases}$$

Ta có $|\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) - f(x)| \rightarrow 0$ khi $R \rightarrow \infty$ nên $|\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ khi $R \rightarrow \infty$.

Mà $|\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) - f(x)|^p \leq |f(x)|^p$, $|f(x)|^p \in L^p(\mathbb{R})$.

Theo định lý về hội tụ chặn ta có

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0 \text{ khi } R \rightarrow \infty.$$

Do đó $\mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ là dãy Cauchy hội tụ đến $f(x)$ trong $L^p(\mathbb{R})$.

Ta cần chứng minh $\{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{[-R,R]}f)\}$ hội tụ trong $L^q(\mathbb{R})$ với $1 \leq p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Theo bất đẳng thức Hausdorff-Young ta có

Với $g(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ thì $\mathcal{F}g \in L^q(\mathbb{R})$ và

$$\|\mathcal{F}g\|_q \leq C\|g\|_p.$$

Như vậy với $g(x) = \mathcal{X}_{[-R,R]}(x)f(x)$ ta có $\{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{[-R,R]}f)\}$ là dãy Cauchy và hội tụ đến một hàm $\mathcal{F}f$ trong $L^q(\mathbb{R})$ với $1 \leq p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Nhưng với $2 < p < \infty$ việc xây dựng như thế này không còn đúng. Người ta phải xây dựng biến đổi Fourier theo cách khác. Ví dụ sau cho thấy với $2 < p < \infty$ bất đẳng thức Hausdorff-Young như trên không còn đúng.

Ví dụ 2.3.1. [3] Chọn dãy $f_k(x) = e^{-(1-ik)x^2}, k = 1, 2, \dots$. Biến đổi Fourier của $f(x)$ là

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-(1-ik)x^2} d\mu.$$

Biến đổi này thỏa mãn bài toán Cauchy

$$2(1-ik) \frac{d\mathcal{F}f_k}{d\xi}(\xi) - \xi \mathcal{F}f_k(\xi) = 0,$$

với điều kiện ban đầu là $\mathcal{F}f_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2(1-ik)}}$ nên $\mathcal{F}f_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(1-ik)}} e^{-\frac{(1+ik)\xi^2}{4(1+k^2)}}$.

Khi đó chuẩn trong $L^p(\mathbb{R})$ là

$$\|f_k\|_p = \frac{\pi^{1/2p}}{p^{1/2p}}$$

Còn chuẩn trong $L^q(\mathbb{R})$ là

$$\|\mathcal{F}f_k\|_q = \frac{2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}(1+k^2)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2p}}}{q^{\frac{1}{2q}}}.$$

Vì $2 < p < \infty$ nên $1 \leq q < 2$ nên $\|\mathcal{F}f_k\|_q \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$.

Kết luận

Khóa luận đã trình bày hai nội dung chính là:

- Xây dựng tích phân Lebesgue từ độ đo Lebesgue, hàm đo được Lebesgue, tích phân Lebesgue, chuyển giới hạn qua dấu lấy tích phân.
- Không gian $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, tính chất đầy đủ và tách được, phép biến đổi Fourier trong $L^p, 1 \leq p \leq 2$.

Tuy nhiên do thời gian làm khóa luận còn hạn chế không thể tránh được những nhầm lẫn, sai sót nên em mong nhận được sự góp ý của thầy cô và bạn đọc.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Nguyễn Xuân Liêm (2007), *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục.

Tiếng Anh

- [3] Elliott H. Lieb and Michael Loss (2001), *Analysis (second edition)*, American Mathematical, Society.
- [4] Frank Burk (1998), *Lebesgue Measure and Integral An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund (1977), *Measure and Integral an Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc. New York.

Tiếng Pháp

- [6] H. Brezis (1983), *Analyse Fonctionnelle*, Masson.